Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

SERVICE DES CONCOURS ET EXAMENS

ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION DE 1984

Mathématiques I

OPTION GENERALE

Vendredi 11 mai 1984, de 14 heures à 18 heures

ATTENTION! La présentation, l'écriture et l'orthographe ont leur part dans la note.

I. Soit n un nombre entier naturel non nul. On considère les fonctions numériques f_n, g_n et h_n définies sur l'intervalle $[0,n]$ par les relations :

$$f_n(t) = (1 - \frac{t}{n})^n \qquad g_n(t) = e^{-t} - (1 - \frac{t}{n})^n \qquad h_n(t) = e^t g_n'(t)$$

où g_n' est la dérivée de g_n.

1. Etudier la variation de h_n. Dresser le tableau de variation de cette fonction.
En déduire la variation de g_n. Montrer en particulier que g_n est à valeurs positives et qu'il existe un élément x_n de $[0,n]$ et un seul tel que, pour tout élément t de $[0,n]$, $g_n(t) \leqslant g_n(x_n)$.

2. Montrer que $g_n(x_n) \leqslant \frac{1}{ne}$.

3. Soit x un nombre réel strictement positif.

a) Etudier la convergence des intégrales :

$$I_n(x) = \int_0^n f_n(t)\, t^{x-1}\, dt \qquad \text{et} \qquad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt.$$

b) Soit c un nombre réel strictement positif. Montrer que si $n \geqslant c$, alors :

$$0 \leqslant \Gamma(x) - I_n(x) \leqslant \int_0^c g_n(t)\, t^{x-1}\, dt + \int_c^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1} dt.$$

c) En déduire que la suite de terme général $I_n(x)$ converge vers $\Gamma(x)$.

II. On dit que des suites u et v de nombres réels strictement positifs sont équivalentes si le rapport $\frac{u_n}{v_n}$ tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$. On admet que les suites de termes généraux $n!$ et $\sqrt{2\pi n}\,(\frac{n}{e})^n$ sont équivalentes.

Soit α un nombre réel strictement positif. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on pose :

$$P_n(\alpha) = (\alpha + 1)(2\alpha + 1)\ldots[(n-1)\alpha + 1] \qquad \text{et} \qquad J_n(\alpha) = \int_0^1 (1 - t^\alpha)^n\, dt.$$

On convient que $J_0(\alpha) = 1$.

1. Montrer que, pour tout nombre entier naturel non nul n,
$$(1 + n\alpha)J_n(\alpha) = n\alpha J_{n-1}(\alpha).$$

2. En déduire la valeur de $J_n(\alpha)$, que l'on exprimera à l'aide de $P_n(\alpha)$.

3. En effectuant un changement de variable, trouver une relation entre $J_n(\alpha)$ et $I_n(\frac{1}{\alpha})$.
En déduire un équivalent de la suite de terme général $P_n(\alpha)$.

4. Soit désormais x un nombre réel strictement positif. Pour tout nombre entier naturel non nul p, on pose :
$$Q_n(p,x) = x(x + p)(x + 2p)\ldots[x + (n - 1)p].$$

Exprimer $Q_n(p,x)$ à l'aide de $P_n(\frac{p}{x})$. En déduire un équivalent de la suite de terme général $Q_n(p,x)$, les nombres p et x étant fixés.

5. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n,
$$Q_n(2,x)\, Q_n(2,x+1) = Q_{2n}(1,x).$$
En déduire une relation entre $\Gamma(x)$, $\Gamma(\frac{x}{2})$ et $\Gamma(\frac{x+1}{2})$.